

ANALYSE THEORIQUE DES ERREURS LIEES AUX TRANSFERTS DE CHALEUR PARASITES LORS DE LA MESURE D'UNE TEMPERATURE DE SURFACE PAR CONTACT*

B. CASSAGNE, G. KIRSCH et J. P. BARDON

Laboratoire de Thermocinétique, Institut de Physique, Université de Nantes,
 ERA CNRS 663, 2, rue de la Houssinière, 44072 Nantes Cédex, France

(Reçu le 14 novembre 1979 et version révisée le 28 janvier 1980)

Résumé — Après avoir exposé brièvement les causes d'erreur liées aux transferts de chaleur parasites milieu-capteur thermométrique-environnement, on présente tout d'abord un schéma théorique simple permettant d'évaluer ces erreurs en régime permanent. On présente ensuite les résultats de deux études théoriques évaluant ces erreurs en régime transitoire. Ces études mettent clairement en évidence l'influence des propriétés thermophysiques et géométriques du milieu et du capteur, ainsi que l'influence primordiale dans le cas de milieux conducteurs de la résistance thermique de contact capteur thermométrique-milieu sur l'erreur de mesure et sur le temps de réponse. Enfin, elles montrent clairement le domaine de validité en régime transitoire du schéma simple utilisé pour le calcul de l'erreur en régime permanent.

NOMENCLATURE

a , diffusivité thermique du milieu [$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$];
 a_B , diffusivité thermique de la barre [$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$];
 $B = \sqrt{\left(\frac{\lambda_B c_B \rho_B}{\lambda c \rho}\right)}$, nombre sans dimension;
 c , chaleur spécifique du milieu [$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$];
 c_B , chaleur spécifique de la barre [$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$];
 $E = T - T_M$, erreur de mesure absolue [K];
 $E^* = \frac{T - T_M}{T - T_E}$, erreur relative, nombre sans dimension;
 h , coefficient d'échange global [$\text{W m}^{-2} \text{K}^{-1}$];
 h_c , coefficient d'échange par convection naturelle [$\text{W m}^{-2} \text{K}^{-1}$];
 h_r , coefficient d'échange par rayonnement [$\text{W m}^{-2} \text{K}^{-1}$];
 $H = \frac{2hy_B}{\lambda} \frac{c\rho}{c_B\rho_B}$, nombre sans dimension;
 K , coefficient d'erreur, nombre sans dimension;
 L , épaisseur du milieu [m];
 r_c , résistance de contact [K W^{-1}];
 r_E , résistance de liaison avec l'environnement [K W^{-1}];
 r_M , résistance de macrostriction [K W^{-1}];
 R_c , résistance de contact par unité de surface [$\text{K m}^2 \text{W}^{-1}$];
 t , temps [s];
 t_r , temps de réponse [s];

$t^* = \frac{at}{y_B^2}$, temps réduit, nombre sans dimension;
 T , température de surface exacte [K];
 T_E , température de l'environnement [K];
 T_M , température de surface mesurée [K];
 T_p , température de surface perturbée [K];
 u , variable de Laplace [s^{-1}];
 x , abscisse [m];
 $X = \frac{\lambda R_c}{y_B}$, nombre sans dimension;
 y_B , rayon de la barre [m].

Symboles grecs

θ , champ de température dans le milieu [K];
 θ_B , champ de température dans la barre [K];
 λ , conductivité thermique du milieu [$\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$];
 λ_B , conductivité thermique de la barre [$\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$];
 ρ , masse volumique du milieu [kg m^{-3}];
 ρ_B , masse volumique de la barre [kg m^{-3}];
 ϕ , flux de chaleur [W m^{-2}].

1. INTRODUCTION

LA MESURE d'une température de surface par contact est un problème important qui intervient dans de nombreux dispositifs expérimentaux, tant en régime permanent qu'en régime transitoire, l'élément sensible du capteur thermométrique étant soudé, collé ou simplement pressé sur cette surface. Malheureusement, la mesure correcte de cette température de surface par contact est une opération difficile, sujette à de

*A full English translation of this article is obtainable from the authors.

nombreuses erreurs liées à la notion même de température, au principe de sa mesure, à la complexité structurale de la surface et à l'environnement. De nombreuses études et mises au point pour analyser et calculer ces erreurs ont donc été faites périodiquement à ce sujet [1 à 22].

On se propose de présenter ici sous un éclairage peu connu, certains aspects concernant les erreurs de mesure liées aux transferts de chaleur parasites milieu-captteur thermométrique-environnement, en insistant notamment sur le rôle des conditions de contact.

1.1. Analyse des erreurs liées aux transferts de chaleur parasites

Les échanges superficiels par convection et rayonnement qui se produisaient à la surface du solide sont modifiés par l'application du capteur thermométrique. Tout d'abord, sa surface n'a pas forcément les mêmes propriétés convectives, émissives ou absorbantes et surtout la liaison matérielle qui relie l'élément thermosensible à l'extérieur provoque un transfert de chaleur parasite par conduction au sein du milieu vers le capteur thermométrique, puis, par conduction, convection et rayonnement le long de cette liaison.

Tous ces transferts parasites provoquent, à l'endroit même de la mesure, une perturbation locale du champ de température positive ou négative selon qu'il y a diminution ou accroissement des transferts surface-environnement. La température de surface n'est plus T mais T_p . De plus, la température du capteur thermométrique T_M n'est en général pas égale à cette température perturbée T_p car les conditions de contact capteur thermométrique-surface, toujours imparfaites, font que sa température T_M diffère d'autant plus de T_p que la résistance thermique de contact capteur thermométrique-surface r_c est grande et que le flux de chaleur Φ traversant l'interface est grand.

Pour des mesures en régime variable s'ajoutent les influences des différences de capacité calorifique capteur thermométrique-milieu et des températures initiales.

L'étude des erreurs qui résultent de ces transferts parasites nécessite donc la résolution de problèmes de transferts thermiques complexes toujours variés en raison de la diversité des configurations et des conditions liées à l'environnement. Nous nous proposons ici de la mener à partir d'un modèle très schématique mais typique qui va nous permettre de bien mettre en lumière le rôle respectif de la conduction au sein du milieu, de l'imperfection du contact capteur thermométriques-surface, enfin, des échanges avec l'environnement.

Nous considérerons les deux situations physiques suivantes :

- l'une où le capteur thermométrique et le milieu à températures différentes sont mis brusquement en contact,
- l'autre, où le capteur thermométrique étant

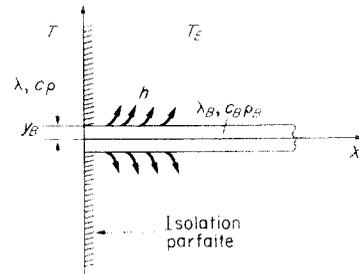


FIG. 1. Description du modèle choisi.

préalablement appliqué sur une face du milieu, l'autre face est soumise à un échelon de température.

Mais auparavant, nous allons préciser le modèle choisi et rappeler les principaux résultats que nous avons obtenu en régime permanent.

2. DESCRIPTION DU MODELE CHOISI (FIG. 1)

On assimile le corps dont on veut mesurer la température de surface et dont les dimensions sont grandes devant celles de la zone de mesure à un milieu semi infini initialement à la température T_i de caractéristiques thermophysiques λ et $c\rho$. Nous supposons que ce milieu est limité d'un côté par une surface plane et adiabatique avec l'environnement à la température uniforme T_E . Le capteur thermométrique envisagé est assimilé à une barre homogène équivalente, semi-infinie, de rayon y_B , de caractéristiques thermophysiques λ_B et $c_B\rho_B$ échangeant de la chaleur par convection et rayonnement avec l'environnement par sa surface latérale, le coefficient global d'échange barre-environnement étant h . L'élément sensible du capteur thermométrique que nous supposons infiniment mince est en contact imparfait (résistance de contact R_c par unité de surface) avec la face plane selon un cercle de rayon y_B . Cette configuration très schématique, mais qui permet de bien comprendre le problème de l'erreur de mesure, a été d'abord étudiée par Nusselt dans le cas du régime permanent et en supposant un contact thermique parfait entre le capteur thermométrique et la surface [1]. Nous avons étendu l'analyse de cette erreur de mesure en régime permanent au cas plus réaliste d'un contact thermomètre-surface imparfait. Nous allons donc tout d'abord rappeler les principaux résultats que nous avons obtenu dans ce cas [14, 16, 18].

3. ANALYSE DE L'ERREUR EN REGIME PERMANENT (FIG. 2)

Supposons le régime permanent établi. Un flux de chaleur Φ est évacué par l'intermédiaire de la barre vers l'environnement et perturbe localement le champ de température initialement uniforme à T . Soit T_M la température de la section origine $x = 0$ de cette barre,

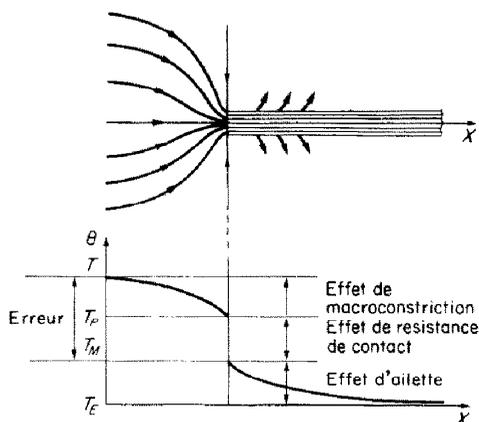


FIG. 2. Analyse de l'erreur en régime permanent.

c'est-à-dire la température mesurée par l'élément sensible. L'erreur de mesure qui est $T - T_M$ résulte de la combinaison de trois effets :

3.1. L'effet de macroconstriction au sein du milieu

Il est provoqué par la convergence des lignes de courant thermique vers la zone de mesure. Il en résulte qu'au niveau de cette zone la température du milieu n'est plus T mais T_p . Cette température perturbée T_p est reliée à la température au loin T , c'est-à-dire à la température exacte qu'il y avait en surface avant d'y appliquer le capteur thermométrique par la relation :

$$T - T_p = r_M \Phi \quad (1)$$

où r_M est la résistance de macroconstriction ; elle est due à la convergence des lignes de flux vers le cercle de contact. Son calcul dans l'hypothèse d'un milieu semi-infini est classique [23] ; on obtient les deux expressions suivantes selon que l'on suppose le cercle de contact respectivement isotherme ou traversé par un flux de densité uniforme :

$$r_M = \frac{1}{4y_B\lambda} \quad \text{ou} \quad r_M = \frac{8}{3\pi^2 y_B\lambda} \quad (2)$$

λ étant la conductivité thermique du milieu.

Le calcul montre également que l'essentiel de la perturbation de température est localisé au voisinage immédiat du cercle de contact (94 % de la chute $T - T_p$ s'effectuent à l'intérieur de la sphère de centre 0 et de rayon $10 y_B$).

3.2. L'effet de résistance de contact à l'interface milieu-capteur thermométrique

Il est responsable de la chute de température $T_p - T_M$ entre la température perturbée et la température mesurée. On a :

$$T_p - T_M = r_c \Phi \quad (3)$$

où r_c représente la résistance de contact pour l'aire πy_B^2 ($r_c = R_c/\pi y_B^2$). Cet effet est lié à l'imperfection du contact qui résulte des irrégularités des surfaces.

3.3. L'effet d'ailette qui est responsable des échanges de chaleur entre la partie extérieure du capteur thermométrique et l'environnement

Le flux de chaleur Φ transféré entre la face $x = 0$ et l'environnement est relié à l'écart entre la température mesurée T_M et la température de l'environnement T_E par :

$$T_M - T_E = r_E \Phi \quad (4)$$

r_E représentant la résistance thermique globale entre la face $x = 0$ et l'environnement. Elle représente globalement les échanges avec l'environnement. Dans le cas du modèle r_E se déduit de la solution classique de la barre semi-infinie

$$r_E = \frac{1}{\pi y_B \sqrt{(2h\lambda_B y_B)}} \quad (5)$$

Des relations (1), (3), (4), on en déduit :

$$\Phi = \frac{T - T_E}{r_M + r_c + r_E} \quad (6)$$

et l'erreur de mesure

$$E = T - T_M = K(T - T_E) \quad (7)$$

avec

$$K = \frac{1}{1 + \frac{r_E}{r_c + r_M}} \quad (8)$$

L'erreur commise est donc proportionnelle à l'écart entre la température à mesurer T et la température de l'environnement T_E . Le coefficient de proportionnalité K appelé 'coefficient d'erreur' représente l'erreur relative sur la mesure de l'écart $T - T_E$. Il est d'autant plus faible que la somme des résistances de macroconstriction r_M et de contact r_c est faible devant la résistance de liaison avec l'environnement r_E .

3.4. Conséquences importantes de cette relation

De l'expression de l'erreur ainsi établie pour cette configuration simple, on peut souligner les points suivants :

1. Tout d'abord, même pour des conditions de contact parfaites ($r_c = 0$), il y a une erreur qui dépend du rapport r_M/r_E .

2. Si le milieu est bon conducteur de la chaleur (λ grand), la résistance de macroconstriction [$r_M = (1/4 y_B\lambda)$ ou $(8/3\pi^2 y_B\lambda)$] va être en général petite devant r_c et l'erreur sera surtout déterminée par r_c . Il faudra veiller à ce que r_c soit la plus faible possible et reste stable.

3. Pour des mesures sur un isolant (λ faible), r_M est grande et en général très supérieure à r_c . L'effet de macroconvergence va avoir le rôle prépondérant sur l'erreur.

4. Quel que soit le type de mesure, la résistance r_E de liaison avec l'environnement devra être maximale. Le rayon y_B , la conductivité λ_B et le coefficient d'échange h seront choisis les plus faibles possibles.

5. Enfin, l'erreur est d'autant plus faible que T_E est proche de la température à mesurer T . Elle varie avec T_E .

4. CAS DE LA BRUSQUE MISE EN CONTACT DU CAPTEUR THERMOMETRIQUE ET DU MILIEU A TEMPERATURES DIFFERENTES

4.1. Description du modèle choisi (Fig. 1)

Le modèle est identique. Simplement, le capteur thermométrique initialement à la température de l'environnement T_E , est mis brusquement en contact avec le milieu dont on veut mesurer la température T . Nous nous proposons ici d'étudier l'évolution de l'erreur de mesure dans le temps, depuis l'application du capteur thermométrique jusqu'à l'obtention du régime permanent.

4.2. Calcul analytique de l'erreur de mesure

La recherche directe du champ de température qui prend naissance dans le milieu et dans la barre dès leur mise en contact est difficile. Nous avons préféré séparer l'étude des champs de température $\theta_B(x, t)$ et $\theta(x, r, t)$ qui se développent respectivement dans la barre et dans le milieu. Pour cela, on désigne par $\Phi(t)$ le flux de chaleur traversant le cercle de contact du milieu vers la barre en considérant que sa section origine est le siège d'une source continue de chaleur uniformément répartie sur la surface de contact et libérant un flux de chaleur $\Phi(t)$. De même, la recherche du champ de température θ dans le milieu semi-infini est obtenue en considérant que celui-ci est le siège d'une source de chaleur continue, également uniformément répartie sur la surface de contact et libérant un flux de chaleur $-\Phi(t)$.

Ces deux expressions θ_B et θ sont obtenues en intégrant, par rapport au temps, les solutions données par Carslaw et Jaeger [23] pour la théorie des sources instantanées.

On obtient

$$\theta_B(x, t) = T_E + \frac{1}{\pi y_B^2 \sqrt{\pi \lambda_B c_B \rho_B}} \int_0^t \Phi(t') \times e^{-v(t-t') - [x^2/4a_B(t-t')] } \frac{dt'}{\sqrt{(t-t')}} \quad (9)$$

avec $v = 2h/c_B \rho_B y_B$, $a = \lambda_B/c_B \rho_B$ diffusivité thermique de la barre et

$$\theta(x, r, t) = T - \frac{1}{\pi y_B \sqrt{\pi \lambda c \rho}} \int_0^t \frac{\Phi(t')}{\sqrt{(t-t')}} e^{-[x^2/4a(t-t')] } \times \left[\int_0^r e^{-ax^2(t-t')} J_0(ax) J_1(\alpha y_B) d\alpha \right] dt' \quad (10)$$

avec $a = \lambda/c\rho$ diffusivité thermique du milieu. La température moyenne $\bar{\theta}(0, t)$ sur le cercle de contact est définie par :

$$\bar{\theta}(0, t) = \frac{1}{\pi y_B^2} \int_0^{y_B} \theta(0, r, t) 2\pi r dr \quad (11)$$

Il suffit alors d'écrire la condition de raccordement sur le cercle de contact entre la température perturbée du milieu $T_p(t) = \bar{\theta}(0, t)$, la température mesurée $T_M(t) = \theta_B(0, t)$ et le flux de chaleur $\Phi(t)$. On a en effet la condition classique 'résistance de contact'

$$T_p(t) - T_M(t) = \frac{R_c}{\pi y_B^2} \Phi(t) \quad (12)$$

R_c étant la résistance de contact par unité de surface.

Cette condition nous permet d'en déduire $\Phi(t)$, d'où l'erreur de mesure

$$E(t) = T - T_M(t) \quad (13)$$

On est conduit à résoudre une equation intégrale. Pour cela, nous avons utilisé la méthode de la transformée de Laplace. Finalement, nous avons obtenu l'expression de la transformée de Laplace de l'erreur, soit :

$$\mathcal{L}[E^*(t^*)] = \frac{1}{u} \frac{B \sqrt{(u+H)} [i \sqrt{u+X}]}{1 + B \sqrt{(u+H)} [i \sqrt{u+X}]} \quad (14)$$

où

$$E^* = \frac{E}{T - T_E} \text{ est l'erreur relative.}$$

u la variable de Laplace associée au temps réduit $t^* = at/y_B^2$;

$i \sqrt{u}$ la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n u^{n, 1/2}}{\left(\frac{n+1}{2}\right)! \left(\frac{n+3}{2}\right)!}$$

$$B = \sqrt{\left(\frac{\lambda_B c_B \rho_B}{\lambda c \rho}\right)}, \quad H = \frac{2h y_B}{\lambda c_B \rho_B}$$

$$X = R_c \frac{\lambda}{y_B}$$

sont des paramètres sans dimensions.

B est l'effusivité relative du capteur thermométrique par rapport au milieu et caractérise en quelque sorte l'aptitude du thermomètre à extraire de la chaleur ; H est le produit du nombre de Biot qui caractérise la qualité d'isolation du capteur thermométrique par le rapport des capacités calorifiques du milieu et de la barre ;

X caractérise l'imperfection du contact thermique capteur thermométrique-milieu.

La recherche directe de l'original $E^*(t^*)$ de manière analytique soulevant de grandes difficultés, nous avons préféré déterminer d'abord des solutions approchées de l'erreur dans les premiers instants de la mise en contact (t^* petit) et retrouver l'expression de l'erreur, déjà connue, en régime permanent.

4.3. Etude des cas limites

A l'instant initial, si le contact est parfait, l'erreur ne dépend que des effusivités du milieu et de la barre

$$E^*(0) = \frac{\sqrt{(\lambda_B c_B \rho_B)}}{\sqrt{(\lambda_B c_B \rho_B)} + \sqrt{(\lambda c \rho)}} \quad (15)$$

qui est un résultat classique de thermocinétique [23].

Alors que si le contact est imparfait ($R_c \neq 0$), $E^*(0)$ est égale à 1, quels que soient le milieu, le capteur thermométrique et l'imperfection du contact. Pour les faibles valeurs du temps, on a l'expression asymptotique :

$$E^*(t) = 1 - \frac{2\sqrt{t}}{R_c \sqrt{(\pi \lambda_B c_B \rho_B)}} \quad (16)$$

L'erreur décroît donc d'autant plus vite dans les premiers instants que le contact thermique thermomètre-surface est bon.

Pour $t \rightarrow \infty$ on retrouve l'expression de l'erreur en régime permanent [14, 16, 18].

4.4. Calcul de l'erreur pour t quelconque

Après avoir vérifié la justesse du calcul analytique par l'étude des cas limites, nous allons évaluer maintenant, dans l'intervalle de temps intermédiaire, l'erreur de mesure par une méthode numérique d'inversion de la transformée de Laplace due à Bellman *et al.* [24], ceci pour trois milieux différents, donnés à titre d'exemples :

un conducteur $\lambda = 100 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$, $c\rho = 3,1 \cdot 10^6 \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-1}$;

un isolant à forte capacité calorifique $\lambda = 0,19 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$, $c\rho = 1,7 \cdot 10^6 \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-1}$;

un isolant à faible capacité calorifique $\lambda = 5 \cdot 10^{-2} \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$, $c\rho = 8,4 \cdot 10^3 \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-1}$.

Dans un but de clarté, nous nous sommes limités à prendre un capteur thermométrique bien déterminé, c'est-à-dire un thermocouple nichrome-constantan émaillé dont les caractéristiques sont les suivantes :

$$\lambda_B = 17 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1} \quad c_B \rho_B = 3,4 \cdot 10^6 \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-1}.$$

Le coefficient d'échange par convection naturelle h_c autour d'un fil dans l'air est relié au rayon y_B de ce fil par la relation [25]

$$h_c y_B = 5 \cdot 10^{-3} \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}. \quad (17)$$

Nous pouvons donc écrire, si h_r est le coefficient d'échange par rayonnement :

$$h y_B = (h_c + h_r) y_B = 5 \cdot 10^{-3} + h_r y_B \quad (18)$$

où h est le coefficient d'échange global.

Nous prendrons $h_r = 5 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$ et nous considérons deux valeurs du rayon y_B de la barre

$$y_B = 5 \cdot 10^{-5} \text{ m} \quad \text{et} \quad y_B = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

et pour chaque valeur de y_B , quatre valeurs du rapport R_c/y_B :

0 (contact parfait)

0,05 ; 0,2 ; 1 K m W^{-1} (contact imparfait).

Les Figs. 3-5 donnent l'évolution de l'erreur relative en fonction du temps pour ces différents cas. Elles permettent de préciser l'importance de cette erreur dans différentes situations, ainsi que le temps de réponse.

4.4.1. Importance de l'erreur de mesure. L'erreur de mesure $E(t)$ est proportionnelle à l'écart de température $T - T_E$.

On constate sur les Figs. 3-5 les résultats suivants :

1. L'erreur est décroissante avec le temps, le maximum ayant lieu à l'instant initial.

2. Les conditions de contact jouent un rôle très important sur l'erreur de mesure.

Lorsque le contact est parfait, l'erreur commise sur un conducteur est très inférieure à celle commise sur un isolant. Dès que le contact est imparfait, l'erreur devient à l'instant initial égale à 100 %, quels que soient la nature du corps à mesurer et l'imperfection du contact. Cependant, des différences fondamentales apparaissent entre les mesures sur milieux conducteurs et sur milieux isolants :

Pour un milieu isolant, l'erreur reste très importante, même en régime permanent. Elle dépend relativement peu de la résistance de contact, mais principalement de la convergence des lignes de flux vers le capteur (phénomène de macrostriction) ;

Par contre, pour un milieu conducteur, l'erreur commise dépend essentiellement de la résistance thermique de contact R_c . Cette erreur décroît d'autant plus vite et sa valeur limite est d'autant plus petite que cette résistance est faible ;

Enfin, le rayon y_B de la barre a un rôle également

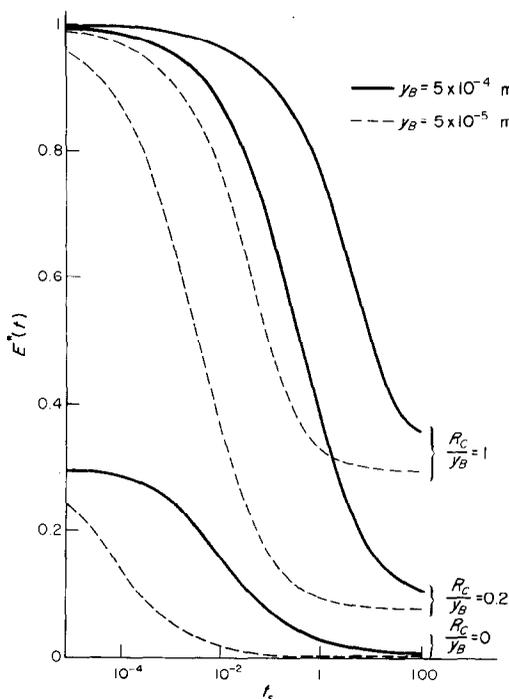


FIG. 3. Evolution de l'erreur relative $E^*(t)$ pour le conducteur.

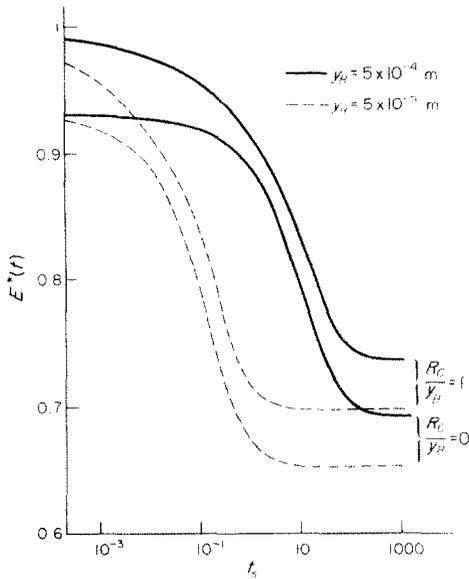


FIG. 4. Evolution de l'erreur relative $E^*(t)$ pour l'isolant à forte capacité calorifique.

important. En effet, quels que soient le corps considéré et la résistance de contact R_c , l'erreur de mesure diminue avec le rayon y_B de la barre.

4.4.2. *Inertie de la mesure.* En ce qui concerne le temps nécessaire à l'obtention du régime permanent dans les différents exemples, et pour permettre une comparaison précise, nous avons choisi d'évaluer le

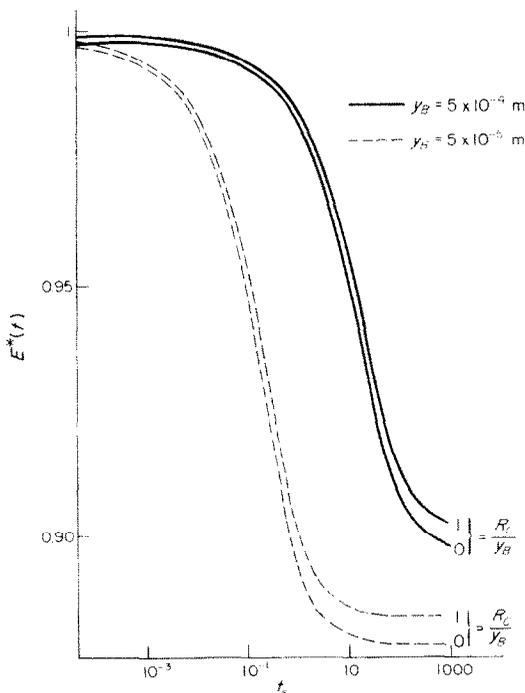


FIG. 5. Evolution de l'erreur relative $E^*(t)$ pour l'isolant à faible capacité calorifique.

temps de réponse t_r , défini par la relation

$$\frac{E^*(t_r) - E^*(\infty)}{E^*(0) - E^*(\infty)} = \frac{5}{100} \quad (19)$$

Le Tableau 1 suivant donne les différentes valeurs du temps de réponse t_r , pour tous les cas considérés.

On constate que :

1. Pour un même capteur thermométrique, ce temps de réponse dépend beaucoup des caractéristiques du milieu :
2. Pour un même milieu, le temps de réponse est d'autant plus grand que la résistance de contact par unité de surface R_c est grande et que le rayon de la barre y_B est grand ;
3. Dans le cas du contact parfait, le temps de réponse pour un conducteur est beaucoup plus petit que celui d'un isolant compact lui-même plus petit que celui d'un milieu isolant à faible capacité calorifique ;

4. Par contre, pour un contact imparfait, le temps de réponse croît très rapidement avec R_c dans le cas d'un conducteur, alors qu'il varie très peu pour les isolants. Ceci montre encore l'influence prédominante dans le cas de milieux isolants, de l'effet de convergence des lignes de flux (macroconstriction). Par contre, pour des milieux conducteurs, le temps de réponse dépend essentiellement de la résistance de contact R_c . On peut donc obtenir selon l'importance de R_c des valeurs du temps de réponse pour un conducteur qui sont du même ordre de grandeur que celles relatives à un isolant. Ainsi, les conditions de contact jouent encore un rôle primordial sur le temps de réponse du dispositif thermométrique qui n'est donc pas une caractéristique du thermomètre, mais de l'ensemble milieu-capteur thermométrique-environnement

5. CAS OU LE CAPTEUR ETANT PREALABLEMENT APPLIQUE SUR UNE FACE DU MILIEU, L'AUTRE FACE EST SOUMISE A UN ECHELON DE TEMPERATURE

5.1. Description du modèle choisi (Fig. 6)

Le modèle est semblable à celui décrit en section 2, les modifications étant les suivantes :

1. Le milieu dont on veut mesurer la température de surface est un mur fini, d'épaisseur L ,
2. Les répartitions initiales de températures dans le milieu et le capteur thermométrique sont identiques et égales à la température de l'environnement T_E ,
3. A l'instant initial, la face $x = L$ est soumise brusquement à un échelon de température de T_E à T .

Nous nous proposons encore de calculer l'erreur de mesure en régime transitoire en tenant compte de l'imperfection du contact thermomètre-milieu.

5.2. Calcul analytique de l'erreur de mesure

L'erreur de mesure est notée

$$E(t) = T(t) - T_M(t). \quad (20)$$

Dans cette expression $T(t)$ est la température qu'il y

Tableau 1. Valeurs de t_n (s)

Valeurs de $\frac{R_c}{y_B}$ K m W ⁻¹		0	0,05	0,20	1
Conducteur†	$y_B = 5 \cdot 10^{-5}$ m	0,012	0,038	0,25	1
	$y_B = 5 \cdot 10^{-4}$ m	1,8	3,6	20	56
Isolant à forte capacité calorifique†	$y_B = 5 \cdot 10^{-5}$ m	1,3	1,32	1,35	1,4
	$y_B = 5 \cdot 10^{-4}$ m	91	94	101	110
Isolant à faible capacité calorifique†	$y_B = 5 \cdot 10^{-5}$ m	2,5	2,54	2,63	2,8
	$y_B = 5 \cdot 10^{-4}$ m	298	302	307	316

†Caractéristiques thermiques données en 4.4.

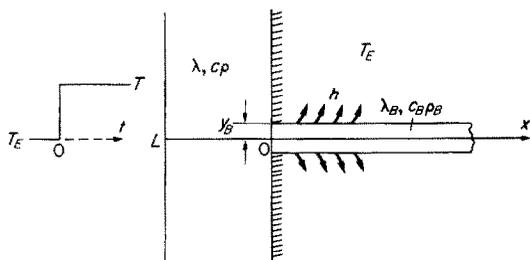


FIG. 6. Description du modèle choisi.

aurait à l'instant t sur la face isolée du mur en l'absence de capteur thermométrique. Le calcul de $T(t)$ est classique [23]:

$$T(t) = T - \frac{4(T - T_E)}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} e^{-[a(2n+1)^2 \pi^2 t / 4L^2]} \quad (21)$$

$T_M(t)$ est la température indiquée par le capteur thermométrique lorsque celui-ci est placé sur la surface. Le calcul de $T_M(t)$ est plus complexe puisque cette température dépend du flux de chaleur $\Phi(t)$ traversant le cercle de contact du milieu vers la barre à l'instant t , lui-même relié à la température perturbée $T_p(t)$ par la condition de raccordement

$$T_p(t) - T_M(t) = \frac{R_c}{\pi y_B} \Phi(t) \quad (22)$$

où R_c est la résistance thermique de contact par unité de surface. Comme dans 4.2, on cherche donc, en fonction de $\Phi(t)$, l'expression de $T_M(t)$ en considérant que la section $x = 0$ de la barre est le siège d'une source de chaleur uniformément répartie sur la surface de contact et libérant un flux de chaleur $\Phi(t)$

$$T_M(t) = T_E + \frac{1}{\pi y_B^2 \sqrt{(\pi \lambda_B c_B \rho_B)}} \times \int_0^t \Phi(t') e^{-v(t-t')} \frac{dr'}{\sqrt{(t-t')}} \quad (23)$$

avec $v = 2h/c_B \rho_B y_B$ et $a_B = \lambda_B/c_B \rho_B$ diffusivité thermique de la barre. Puis l'expression de $T_p(t)$ est obtenue en considérant que le milieu est soumis à un

puits de chaleur uniformément réparti sur la surface de contact et absorbant un flux de chaleur $\Phi(t)$.

$$T_p(t) = T - \frac{4(T - T_E)}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} e^{-[a(2n+1)^2 \pi^2 t / 4L^2]} - \frac{2}{\sqrt{(\pi \lambda c \rho)} \pi y_B^2} \int_0^t \frac{\Phi(t')}{\sqrt{(t-t')}} \times \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \{ e^{-[(4nL)^2 / 4a(t-t')] } - e^{-[(4nL - 2L)^2 / 4a(t-t')] } \} \times \left[\int_0^{\infty} e^{-a\alpha^2(t-t')} J_1^2(\alpha y_B) \frac{d\alpha}{\alpha} \right] dt' \quad (24)$$

La condition de raccordement devient alors l'équation intégrale en $\Phi(t)$. La transformée de Laplace de cette expression nous a donné $\mathcal{L}[\Phi(t)]$. Nous en avons déduit $\mathcal{L}[T_M(t)]$, puis la transformée de l'erreur de mesure $\mathcal{L}[E(t)]$.

En introduisant les mêmes paramètres sans dimension que dans 4, on obtient:

$$\mathcal{L}[E^*(t^*)] = \frac{1}{uch \left(\frac{L}{y_B} \sqrt{u} \right)} \times \frac{B \sqrt{(u+H)} [I(u) + X]}{1 + B \sqrt{(u+H)} [I(u) + X]} \quad (25)$$

u étant la variable de Laplace associée au temps réduit t^* et $I(u)$ l'intégrale

$$I(u) = \frac{2L}{y_B} \int_0^{\infty} \frac{J_1^2(x)}{x} \frac{\tanh \left[\frac{L}{y_B} \sqrt{(u+x^2)} \right]}{\frac{L}{y_B} \sqrt{(u+x^2)}} dx \quad (26)$$

5.3. Calcul numérique de l'erreur pour t quelconque

Nous avons calculé $E(t)$ par la même méthode d'inversion [24] qu'en 4.4 pour deux exemples de mesure sur deux matériaux différents dont les caractéristiques thermiques ont été données en 4.4:

un conducteur d'épaisseur $L = 5,5 \cdot 10^{-2}$ m
un isolant de forte capacité calorifique et d'épaisseur $L = 10^{-2}$ m.

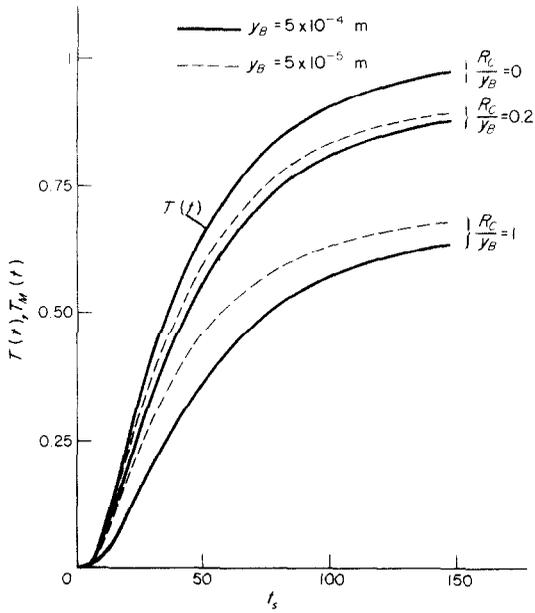


FIG. 7. Evolutions des températures exactes $T(t)$ et des températures mesurées $T_M(t)$ pour le conducteur.

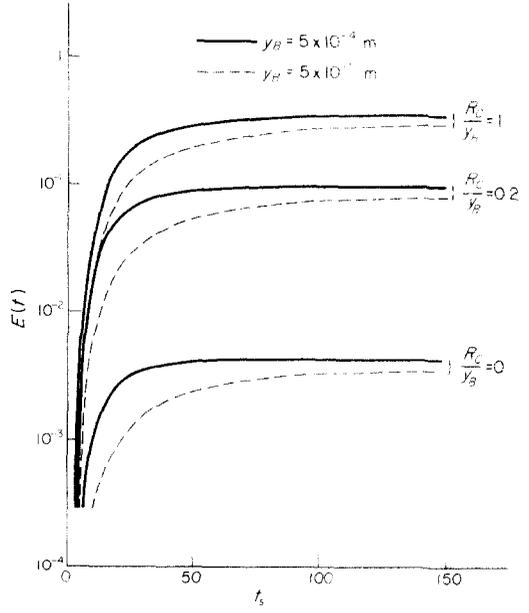


FIG. 9. Evolution de l'erreur absolue $E(t)$ pour le conducteur.

Les caractéristiques thermiques et géométriques du thermomètre sont également les mêmes.

Les évolutions des températures exactes $T(t)$ et des températures qui seront mesurées $T_M(t)$ sont données sur les Figs. 7 et 8. L'erreur absolue $E(t) = T(t) - T_M(t)$ est donnée sur les Figs. 9 et 10.

On constate sur les Figs. 9 et 10 :

1. Que l'erreur absolue de mesure est croissante avec

le temps, le maximum de cette erreur se produisant en régime permanent,

2. Que les conditions de contact jouent un rôle très important sur l'erreur absolue de mesure. Lorsque le contact est parfait, l'erreur commise sur un conducteur est très inférieure à celle commise sur un isolant. Dès que le contact est imparfait, l'erreur absolue devient plus importante, quelle que soit la nature du corps à mesurer, et augmente avec l'imperfection du contact. Cependant, des différences fondamentales apparaissent encore entre les mesures sur milieux conducteurs et sur milieux isolants.

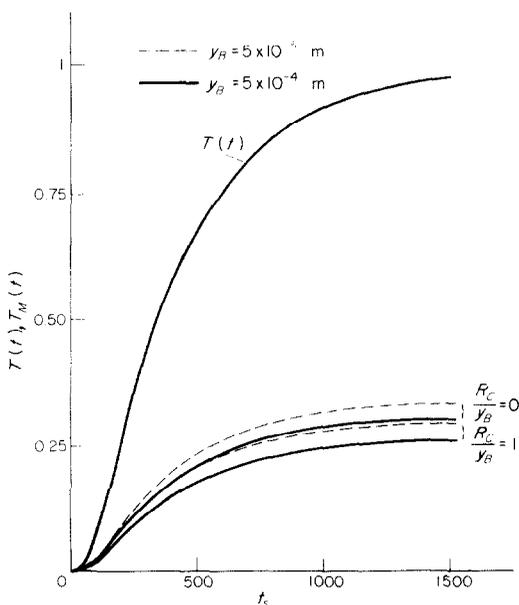


FIG. 8. Evolution des températures exactes $T(t)$ et des températures mesurées $T_M(t)$ pour l'isolant à forte capacité calorifique.

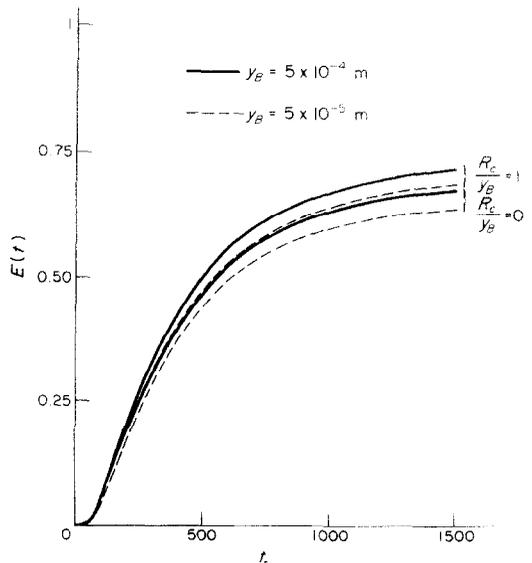


FIG. 10. Evolution de l'erreur absolue $E(t)$ pour l'isolant à forte capacité calorifique.

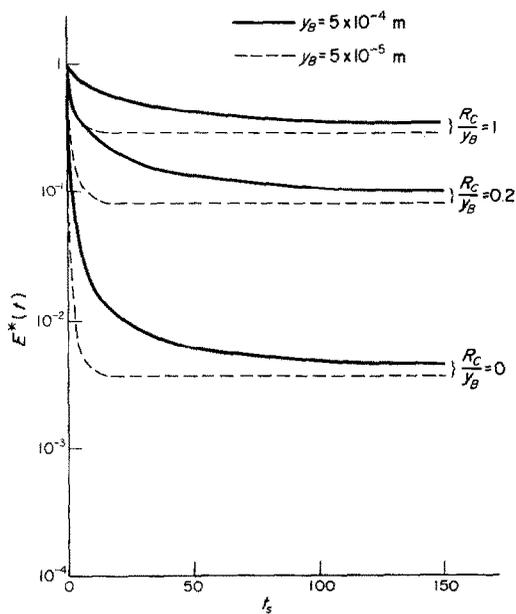


FIG. 11. Evolution de l'erreur relative $E^*(t)$ pour le conducteur.

Pour un milieu isolant, l'erreur absolue qui était déjà très importante avec un contact parfait, n'augmente que faiblement avec l'imperfection du contact (de 0,65 à 0,70 et de 0,69 à 0,73). Cette erreur dépend donc relativement peu de la résistance de contact mais principalement de la convergence des lignes de flux vers le capteur (macroconstriction);

Pour un milieu conducteur par contre, l'erreur commise dépend essentiellement de la résistance thermique de contact, l'erreur absolue croissant d'autant plus vite que le contact est imparfait (de 0,004

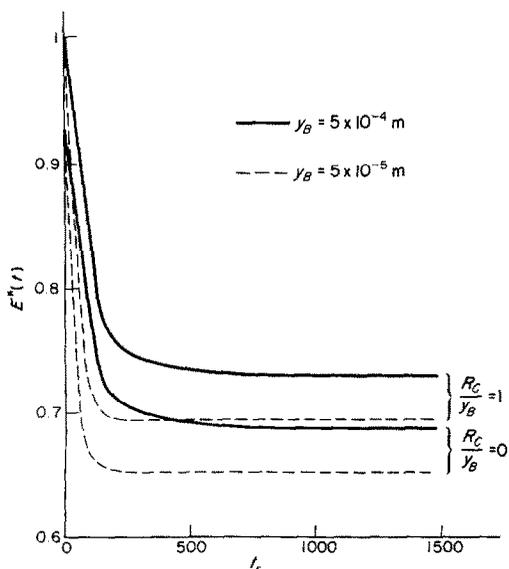


FIG. 12. Evolution de l'erreur relative $E^*(t)$ pour l'isolant à forte capacité calorifique.

à 0,299 et de 0,004 à 0,337).

3. Enfin, le rayon y_B de la barre a un rôle également important. En effet, quels que soient les corps considérés et la résistance de contact R_c , l'erreur absolue de mesure augmente avec le rayon y_B .

Sur les Figs. 11 et 12, nous avons représenté l'évolution de l'erreur relative

$$E^*(t) = \frac{T(t) - T_M(t)}{T(t) - T_E} \tag{27}$$

On constate que l'erreur relative décroît au cours du temps et tend asymptotiquement vers l'erreur relative en régime permanent. Un développement limité de l'erreur relative au voisinage de $t = 0$ montre que pour $R_c \neq 0$, l'erreur relative est maximale pour $t = 0$ et vaut 100%, tandis que pour $R_c = 0$, l'erreur relative initiale ne dépend que des effusivités du milieu et de la barre

$$E^*(0) = \frac{\sqrt{(\lambda_B c_B \rho_B)}}{\sqrt{(\lambda_B c_B \rho_B)} + \sqrt{(\lambda c \rho)}} \tag{28}$$

De plus, les évolutions de l'erreur relative $E^*(t)$ en fonction des conditions de contact, du rayon et de la nature du milieu, sont semblables à celles trouvées pour l'erreur absolue.

5.4. Validité en régime transitoire du schéma simple établi pour le calcul de l'erreur en régime permanent

Les courbes donnant l'évolution de l'erreur relative $E^*(t)$ (Figs. 11 et 12) montrent que celle-ci varie énormément dans les tout premiers instants, mais que rapidement elle devient constante, alors que les températures exactes $T(t)$, mesurées $T_M(t)$ et l'erreur absolue $E(t)$ continuent à évoluer pendant un temps beaucoup plus long. Par ailleurs, la valeur constante de cette erreur relative est égale à celle trouvée en régime permanent. Ceci montre que le schéma simple établi en régime permanent peut être utilisé en régime transitoire.

Pour chiffrer ce résultat, nous avons introduit un temps de réponse t_r , défini par

$$\frac{E^*(t_r) - E^*(\infty)}{E^*(0) - E^*(\infty)} = \frac{5}{100} \tag{29}$$

Le Tableau 2 suivant donne les différentes valeurs de ces temps de réponse pour les deux exemples considérés

On constate d'abord que pour un même corps le temps de réponse t_r est d'autant plus grand que la résistance de contact par unité de surface R_c est grande et que le rayon de la barre y_B est grand. De plus, ce temps de réponse croît très rapidement avec R_c dans le cas d'un conducteur, alors qu'il varie très peu pour l'isolant. Ceci montre encore l'influence prédominante dans le cas de milieux isolants de l'effet de convergence des lignes de flux (microconstriction) sur l'effet de résistance de contact. Par contre, pour des milieux conducteurs, le temps de réponse dépend

Tableau 2. Valeurs de t_r (s)

Valeurs de $\frac{R_c}{y_B} \text{ K m W}^{-1}$		0	0,20	1
Conducteur†	$y_B = 5 \cdot 10^{-5} \text{ m}$	1,2	4,7	9,2
	$y_B = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$	9,2	46	98
Isolant à forte capacité calorifique†	$y_B = 5 \cdot 10^{-5} \text{ m}$	106	110	116
	$y_B = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$	377	381	384

†Caractéristiques thermiques données en 4.4.

essentiellement de la résistance de contact R_c .

Il est enfin intéressant de comparer ces temps de réponse calculés pour l'erreur relative à la durée t_0 de l'évolution transitoire étudiée $T(t)$, cette durée t_0 étant définie par la même relation

$$\frac{T(\infty) - T(t_0)}{T(\infty) - T(0)} = \frac{5}{100} \quad (30)$$

Soit, pour le conducteur, $t_0 = 123 \text{ s}$ et pour l'isolant à forte capacité calorifique $t_0 = 1170 \text{ s}$.

On constate donc que les temps de réponse t_r correspondant à une erreur relative constante à 5% près sont dans tous les cas inférieurs et souvent de beaucoup à la durée du phénomène thermique étudié. Ceci montre quantitativement que le schéma très simple établi en régime permanent peut donner de très bons résultats en régime transitoire ($t > t_r$), à condition de ne pas l'employer au tout début du phénomène ($t < t_r$). Là, seul le calcul développé dans cet article permet d'évaluer correctement l'ordre de grandeur de l'erreur.

6. CONCLUSION

L'étude théorique des erreurs liées aux transferts de chaleur parasites lors de la mesure d'une température de surface par contact a permis de montrer le plus clairement possible sur un modèle schématique, les rôles respectifs que jouent sur l'erreur de mesure, la conduction au sein du milieu, l'imperfection du contact thermomètre-surface, enfin, les échanges avec l'environnement. Le principal résultat pour des mesures en transitoire est qu'il existe dans chaque cas un temps de réponse t_r , au-delà duquel le modèle simple établi pour le calcul de l'erreur en régime permanent est utilisable.

Pour $t > t_r$, l'erreur est toujours proportionnelle à l'écart entre la température à mesurer $T(t)$ et la température extérieure T_E . Le coefficient de proportionnalité K appelé 'coefficient d'erreur' dépend de trois résistances r_M , r_c et r_E . r_M caractérise la conduction parasite au sein du milieu vers le thermomètre, et est d'autant plus importante que le milieu est isolant. r_c caractérise l'imperfection du contact thermomètre-surface. Son influence est d'autant plus grande que le milieu est bon conducteur. Enfin, r_E caractérise globalement les échanges avec l'environnement.

Pour $t < t_r$, seules les courbes données sur les Figs. 3 à 5 et 7 à 12 permettent d'évaluer correctement l'ordre de grandeur de l'erreur dans les deux situations physiques considérées. On peut souligner l'influence primordiale des conditions de contact pour une mesure sur un conducteur. Cette influence se manifeste sur l'erreur qui est beaucoup plus grande qu'en régime permanent. Pour des mesures sur un isolant, l'erreur est très importante; elle dépend très peu des conditions de contact, mais surtout de l'effet de conduction au sein du milieu.

BIBLIOGRAPHIE

1. W. Nusselt, *Forsch. Geb. IngWes.*, Nos. 63 et 64 (1909).
2. P. Vernotte, Thermocinétique. Publication Scientifique et Technique du Ministère de l'Air, No. 224 (1949).
3. L. M. K. Boelter and R. W. Lockhart, An investigation of aircraft heaters. Thermocouple conduction error observed in measuring surface temperatures. National Advisory Committee for Aeronautics. T.N. 2427, pp. 1-35 (1951).
4. D. R. Burnett, Transient temperature measurement errors in heated slabs for thermocouples located at the insulated surface, *J. Heat Transfer* **83**, 505-506 (1961).
5. B. I. Makarov, Errors in temperature measurement on the surface of a solid body using a thermocouple when heating and cooling follow an arbitrary law. N.A.S.A. TTF-9496, pp. 60-65 (1965).
6. C. D. Henning and R. Parker, Transient response of an intrinsic thermocouple, *J. Heat Transfer* **89**, 146-154 (1967).
7. M. B. Larson and E. Nelson, Variables affecting the dynamic response of thermocouples attached to thin skinned models. *J. Heat Transfer* **90**, 166-168 (1968).
8. R. J. Moffat, Temperature measurement in solids. Proceedings Symposium on Advances in Test Measurement, Pittsburgh, Vol. 5, paper No. 68-514 (1968).
9. A. J. Otter, Thermocouples and surface temperature measurement. Atomic Energy of Canada Limited, Chalk River Ontario. A.E.C.L. 3062, pp. 1-18 (1968).
10. E. M. Sparrow, Error estimates in temperature measurements, AGARDO Graph No. 130, *Measurement Techniques in Heat Transfer*, ed. by E. R. G. Eckert and R. J. Goldstein, pp. 13-32 (1970).
11. M. Dutt and T. Stickney, Conduction error in temperature sensors, *ISA Trans.* **9**, 81-87 (1970).
12. D. K. Hennecke and E. M. Sparrow, Local heat sink on a convectively cooled surface. Application to temperature measurement error, *Int. J. Heat Mass Transfer* **13**, 287-304 (1970).
13. H. Poncin, Les apports de la thermocinétique à la mesure des températures de surface, *Cahiers de la Thermique*, No. 3, Série A (1973).

14. J. P. Bardon, Le problème des résistances thermiques de contact en thermométrie. Rapport Bureau National de Métrologie (1973).
15. N. R. Keltner, Intrinsic thermocouple response. ISA ASI 74223, pp. 91–96 (1974).
16. B. Cassagne, Contribution à la mesure des températures de surface par contact. Application au contrôle non destructif. Thèse Doctorat 3^e cycle, Université de Nantes (1974).
17. C. C. Jen and P. Li, Theoretical error analysis of temperature measurement by an embedded thermocouple, *Lett. Heat Mass Transfer* **1**, 171–180 (1974).
18. J. P. Bardon, La mesure des températures de surface par contact. Erreurs liées aux transferts de chaleur parasites, *Rev. Gén. Thermique* No. 170, 121–135 (1976).
19. B. S. Singh and A. Dybbs, Error in temperature measurements due to conduction along the sensor leads, *J. Heat Transfer* **98**, 491–495 (1976).
20. B. Cassagne et G. Kirsch, Etude théorique de l'erreur introduite en régime transitoire lors de la mesure de température de surface par contact. Communication présentée à la 3^e Conférence sur les Capteurs, Velizy (1976).
21. A. Gery, M. Laurent, G. Sinicki et A. Degiovanni, Mesure de température de surface, en régime permanent, à l'aide de détecteurs à contact séparés, *Entropie*, No. 70, 31–34 (1976).
22. P. Satyamurthy, R. K. Marwah, N. Venkatramani and V. K. Rohatgi, Estimation of error in steady-state temperature measurements due to conduction along the thermocouple leads, *Int. J. Heat Mass Transfer* **22**, 1151–1154 (1979).
23. H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*, 2eme Ed. Oxford University Press, London (1959).
24. R. Bellman, R. E. Kalaba and J. A. Lockett, *Numerical Inversion of the Laplace Transform*, Elsevier, New York (1966).
25. M. Jakob, *Heat Transfer*, Vol. 2, p. 154, John Wiley, New York (1959).

THEORETICAL ANALYSIS OF THE ERRORS DUE TO STRAY HEAT TRANSFER DURING THE MEASUREMENT OF SURFACE TEMPERATURE BY DIRECT CONTACT

Abstract — Having briefly exposed the sources of errors which result from the stray heat transfers between the medium, the thermometric sensor and the environment, we present a simple theoretical scheme in order to evaluate these errors in the steady-state regime. Two theoretical studies are presented for the estimation of these errors in the transient regime. These studies show unambiguously the influence of the thermophysical and geometrical properties of the medium and the sensor. It is also shown that for conductive mediums the contact thermal resistance between the thermometric sensor and the medium has a major influence on the measurement error and the response time. Finally these studies allow us to define a validity field for the simple steady-state scheme in the case of the transient regime.

THEORETISCHE ANALYSE DER FEHLER DURCH STREUANTEILE DES WÄRMEÜBERGANGS WÄHREND DER MESSUNG EINER OBERFLÄCHENTEMPERATUR IN DIREKTEM KONTAKT

Zusammenfassung—Nachdem kurz die Fehlerquellen dargelegt wurden, die als Folge der streuenden Anteile des Wärmeübergangs zwischen dem Medium, dem thermometrischen Fühler und der Umgebung auftreten, zeigen wir zunächst ein einfaches theoretisches Verfahren, um diese Fehler im stationären Bereich zu berechnen. Danach werden zwei theoretische Studien zur Abschätzung dieser Fehler im instationären Fall erläutert. Diese Untersuchungen belegen unzweideutig den Einfluß der thermophysikalischen und geometrischen Eigenschaften des Mediums und des Fühlers. Es wird auch gezeigt, daß bei leitenden Medien der thermische Kontaktwiderstand zwischen dem thermometrischen Sensor und dem Medium einen bedeutenden Einfluß auf den Meßfehler und die Reaktionszeit hat. Schließlich können wir aufgrund dieser Untersuchungen einen Gültigkeitsbereich des einfachen stationären Verfahrens für den instationären Fall definieren.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ОШИБОК, ВЫЗВАННЫХ ПОБОЧНЫМИ ТЕПЛОВЫМИ ПОТОКАМИ ПРИ ИЗМЕРЕНИИ ТЕМПЕРАТУРЫ ПОВЕРХНОСТИ МЕТОДОМ ПРЯМОГО КОНТАКТА

Аннотация — Дан краткий анализ ошибок, вызванных побочными тепловыми потоками между средой, термометрическим датчиком и окружающей средой. Приведены простая теоретическая схема оценки этих ошибок в стационарном режиме, а также результаты исследований, проведенных с целью оценки этих ошибок в нестационарном режиме. Результаты исследований однозначно подтверждают роль теплофизических и геометрических характеристик среды и датчика. Показано также, что в теплопроводных средах контактное термическое сопротивление между термометрическим датчиком и средой вносит значительную погрешность в показания прибора. И наконец, проведенные исследования позволили определить область применимости простой стационарной схемы для нестационарного режима.